Estudo de Elementos Finitos

Roberto D Algarte

extratodomiolo.com
2014

Estudo de Elementos Finitos

Roberto D Algarte

1 Problemas de Valor de Contorno Elípticos

1.1 Definições Preliminares

Nesta seção, alguns pré-requisitos matemáticos, utilizados ao longo do texto, são apresentados de maneira superficial. Ao leitor não familiarizado com esses conceitos, recomenda-se o aprofundamento adequado em cada um deles.

1.1.1 Funções

Com relação ao uso de funções neste trabalho, admite-se os seguintes itens:

i. A representação $h : A \mapsto B$ é denominada mapeamento, onde h é a função que atua no domínio A, tal que o valor $h(a) \in B$, $\forall a \in A$.

ii. A função em $h : A \mapsto B$ é dita contínua em A se

$$\lim_{x \to a} h(x) = f(a), \ \forall a \in A. \tag{1}$$

Em termo intuitivos, numa função contínua, pequenas variações quantitativas no domínio determinam pequenas variações na imagem.

iii. Uma função é dita suave de grau q ou q-suave se for contínua e possuir derivadas até ordem q também contínuas. Diz-se que esta função pertence à classe C^q de continuidade. Uma função é denominada apenas suave se a ordem $q = \infty$.

iv. A função em $h : A \mapsto B$ é dita contínua de Lipschitz no domínio A se dados $a_1, a_2 \in A$ quaisquer e um escalar Λ,

$$\frac{d_B(h(a_1), h(a_2))}{d_A(a_1, a_2)} \leqslant \Lambda, \tag{2}$$

onde d_A e d_B são distâncias definidas nos espaços A e B respectivamente. A continuidade de Lipschitz estabelece um valor máximo para a declividade da reta definida entre dois pontos quaisquer do domínio.

v. Uma função h é dita um operador em A se $h : A \mapsto A$. Um operador é dito diferencial se sua regra possuir termos diferenciais. A ordem deste operador corresponde à maior ordem dentre os seus termos.

vi. Um operador em $i : A \mapsto A$ é dito identidade se

$$i(x) = x, \ \forall x \in A. \tag{3}$$

vii. Um operador h é dito simétrico em A se

$$h(x) \cdot y = x \cdot h(y)\,,\, \forall x, y \in A\,. \tag{4}$$

1.1.2 Contorno e Interior

Seja a um membro[1] qualquer do espaço métrico A. Diz-se que o conjunto $B_{a,r} \subset A$ é uma *bola aberta* de centro a e raio $r \in \mathbb{R}_{>0}$ se

$$B_{a,r} = \{x \in A \,|\, \rho(a,x) < r\}\,, \tag{5}$$

onde ρ é uma métrica ou distância. Seja $S \subset A$ tal que $a \in S$. Uma *vizinhança* de a em S é o conjunto qualquer $[a]_S \subset S$ no qual é possível definir uma bola aberta $B_{a,r} \subseteq [a]_S$. Intuitivamente, $[a]_S$ é um conjunto onde a consegue se "mover" para qualquer direção sem deixar de ser seu membro.

O *fechamento* $\overline{S}$ do conjunto S é formado por todo o membro de A tal que quaisquer de suas vizinhanças sempre interceptam S, ou seja,

$$\overline{S} = \{x \in A \,|\, [x]_A \cap S \neq \emptyset\}\,. \tag{6}$$

Diz-se que S é um conjunto *fechado*, representado $\hat{S}$, se $S = \overline{S}$. O conjunto $\mathring{S}$, denominado interior de S, é definido por

$$\mathring{S} = \{x \in S \,|\, \exists\, [x]_S\}\,. \tag{7}$$

Assim, o conjunto $\partial\hat{S} := \hat{S} \setminus \mathring{S}$ é denominado o contorno de $\hat{S}$. Para os fins deste trabalho, um domínio é dito de Lipschitz se seu contorno for definido por uma função contínua de Lipschitz.

1.1.3 Formulação Forte

O problema apresentado a seguir é um clássico problema de valor de contorno linear, escrito de maneira generalizada. Como exemplo, operadores diferenciais hiperbólicos e elípticos enquadram-se no caso em estudo. Na área da elasticidade, a equação de equilíbrio elastostático, detalhada em seções posteriores, está contemplada neste problema genérico.

Problema 1. *Seja $\mathbb{R}^m$ um espaço euclidiano m-dimensional. Sejam um conjunto $\mathcal{A}$ formado por funções suaves que mapeiam o domínio de Lipschitz $\hat{B} \subset \mathbb{R}^m$ para o espaço $\mathbb{R}$ e a função $\boldsymbol{D}^{(q)}$ um operador diferencial de ordem q, simétrico em $\mathcal{A}$. Dada a função $f \in \mathcal{A}$, encontre $g \in \mathcal{A}$, tal que*

$$\boldsymbol{D}^{(q)}(g) = f \;\text{ em }\; \mathring{B}\,, \tag{8}$$

respeitada a condição de contorno

$$\boldsymbol{C}(g) = c \;\text{ em }\; \partial\hat{B}\,, \tag{9}$$

onde são prescritos o operador diferencial $\boldsymbol{C}$ e a função $c \in \mathcal{A}$.

[1] Para evitar confusões, elementos de conjunto serão denominados "membros".

1.1.4 Tipos de Condições de Contorno

Nos termos do problema 1, dada uma função c, uma condição de contorno é dita de *Dirichlet* se o operador $\boldsymbol{C}$ for identidade. Em outras palavras, uma condição de Dirichlet prescreve valores da solução do problema no contorno $\partial \hat{B}$.

Seja o mapeamento $\boldsymbol{n} : \partial \hat{B} \mapsto \mathbb{R}^m$ tal que os valores da função são vetores unitários e normais ao seu domínio. Um condição de contorno é dita de *Neumman* se a função $\boldsymbol{C}(g) = \nabla g \cdot \boldsymbol{n}$ ou

$$\boldsymbol{C}(g) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x_i} n_i \,, \tag{10}$$

onde n_i e x_i são os i-ésimos componentes da função normal unitária $\boldsymbol{n}$ e do vetor $\mathbf{x} \in \partial \hat{B}$ respectivamente. Em outras palavras, a condição de Neumman especifica valores em cada ponto do contorno para a projeção do gradiente de g sobre $\boldsymbol{n}$.

Sejam $\partial \hat{B}_1, \cdots, \partial \hat{B}_n$ parcelas disjuntas do contorno $\partial \hat{B}$ onde

$$\partial \hat{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \partial \hat{B}_i \,. \tag{11}$$

Sejam os operadores lineares $\boldsymbol{C}_1, \cdots, \boldsymbol{C}_n$ em $\mathcal{A}$ e as funções $c_1, \cdots, c_n$ de $\mathcal{A}$, tais que são válidas as restrições $\boldsymbol{C}_i(g) = c_i$ em $\partial \hat{B}_i$. Uma condição de contorno é chamada *mista* se há diferentes restrições ao longo do contorno, ou seja, se

$$\boldsymbol{C}(g) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1(g) & \cdots & \boldsymbol{C}_n(g) \end{bmatrix}^T \tag{12}$$

e

$$c = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix}^T \,. \tag{13}$$

No contexto deste trabalho, serão considerados apenas os tipos de condição de contorno apresentados nesta seção. Assim, a condição de contorno $\boldsymbol{C}$ mais genérica corresponde a uma condição mista, composta por restrições de Neumman, de Dirichlet ou ambas.

1.2 Formulação Fraca

Existem algumas situações onde a solução do problema genérico 1 é muito difícil ou até impossível de ser obtida. Como exemplo desse último caso, a presença de eventuais descontinuidades no domínio, heterogeneidades e singularidades nos dados do problema o tornam insolúvel por conta do pressuposto de suavidade das funções do conjunto $\mathcal{A}$. Convém salientar que este trabalho não tratará desse tipo de incompatibilidade, dessa inviabilidade de solução por conta de restrições fortes, muito embora o método apresentado a seguir seja aplicável à tais questões. Aqui, busca-se solucionar a primeira situação colocada: facilitar a procura por soluções onde as condições do problema a torna bastante complicada. Nesse intuito, uma estratégia já consagrada é converter o problema 1, escrito na forma forte, para uma relação integral equivalente, denominada forma fraca.

1.2.1 Espaços de Sobolev

Na forma fraca do problema 1, elimina-se a condição de suavidade imposta aos membros do conjunto $\mathcal{A}$. Um conjunto adequado e muito utilizado para esta classe de problemas é o espaço de Sobolev, no qual a restrição de continuidade envolve derivadas fracas ou *de Gâteaux*, mais abrangentes do que as derivadas clássicas ou fortes ou *de Fréchet*.

A Derivada de Gâteaux. Seja a função real g com domínio $\hat{B}$. A derivada de Gâteaux ou a G-derivada da função g na direção $\boldsymbol{h} \in \hat{B}$ é definida da seguinte forma:

$$[\mathrm{D_G} g(\boldsymbol{x})](\boldsymbol{h}) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{g(\alpha \boldsymbol{h} + \boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})}{\alpha}, \tag{14}$$

onde α é real e $\boldsymbol{x} \in \hat{B}$. O lado direito direito de (14) expressa que no decurso da aproximação $\alpha \to 0$, a direção $\boldsymbol{h}$ é constante. Intuitivamente, isto se processa em partes, fixando-se primeiramente a direção $\boldsymbol{h}$ e depois levando-se α à zero. Se a definição anterior for válida para qualquer direção $\boldsymbol{h}$, diz-se que g é G-diferenciável em $\hat{B}$ e que a função $\mathrm{D_G} g$ é a G-derivada de g em $\hat{B}$.

Convém lembrar que a derivada clássica, derivada de Fréchet ou F-derivada de g na direção $\boldsymbol{h} \in B$ é definida por:

$$[\mathrm{D_F} g(\boldsymbol{x})](\boldsymbol{h}) = \lim_{\boldsymbol{h} \to 0} \frac{g(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})}{||\boldsymbol{h}||}. \tag{15}$$

Nesta definição, o lado direito mostra que a aproximação $\boldsymbol{h} \to 0$ define uma "trilha" ou um "caminho" próprio. De maneira similar à G-derivada, $\mathrm{D_F} g$ é a F-derivada de g em $\hat{B}$ e g é F-diferenciável em $\hat{B}$ para qualquer "caminho" $\boldsymbol{h} \in \hat{B}$.

Importante ressaltar que a restrição de F-diferenciabilidade é mais forte do que a de G-diferenciabilidade. Desta forma, toda função F-diferenciável (derivada forte) é G-diferenciável (derivada fraca), enquanto o contrário não é verdade. Portanto, se g é F-diferenciável, $\mathrm{D_G} g = \mathrm{D_F} g$.

O Espaço de Sobolev. A função em $g : \hat{B} \mapsto \mathbb{R}$ é dita uma L^p-função em $\hat{B}$ se a integral

$$\int_{\hat{B}} |g|^p < \infty, \tag{16}$$

onde $0 < p < \infty$. Seja um espaço de Banach $\mathcal{L}^p_{\hat{B}}$, formado por L^p-funções em $\hat{B}$, cuja norma é definida por

$$||g||_p = \sqrt[p]{\int_{\hat{B}} |g|^p} \quad, \forall g \in \mathcal{L}^p_{\hat{B}}. \tag{17}$$

Um espaço de Banach $\mathcal{S}^{q,p}_{\hat{B}}$ é dito de Sobolev em $\hat{B}$ se seus membros e as G-derivadas desse membros, até a ordem q, pertencem a $\mathcal{L}^p_{\hat{B}}$. Em outras palavras,

$$\mathcal{S}^{q,p}_{\hat{B}} := \left\{ g \,|\, g \in \mathcal{L}^p_{\hat{B}}, \mathrm{D}^1_{\mathrm{G}} g \in \mathcal{L}^p_{\hat{B}}, \cdots, \mathrm{D}^q_{\mathrm{G}} g \in \mathcal{L}^p_{\hat{B}} \right\}. \tag{18}$$

Define-se a seguinte norma para espaços de Sobolev:

$$||g||_{q,p} = \sqrt[p]{\sum_{i=0}^{q} \int_{\hat{B}} |\mathrm{D}_{\mathrm{G}}^{i} g|^{p}}\,. \tag{19}$$

O Espaço $\mathcal{H}_{\hat{B}}^{q}$. Uma função membro do espaço $\mathcal{L}_{\hat{B}}^{2}$, ou uma L^2-função em $\hat{B}$, é denominada quadrado-integrável. A admissibilidade de soluções para grande parte dos problemas de valor de contorno da Física-Matemática reside necessariamente numa condição de regularidade atendida por funções quadrado-integráveis. No contexto da citada estratégia de tornar o problema 1 menos restritivo, o espaço de Sobolev, gerado a partir de $\mathcal{L}_{\hat{B}}^{2}$, tem importância fundamental, pois a utilização de G-derivadas, alidada à condição de integrabilidade atendida por uma L^2-função, é, por si só, mais fraca do que o pressuposto de suavidade colocado para a solução do problema.

Convém observar que um espaço $\mathcal{S}_{\hat{B}}^{q,2}$, ou $\mathcal{H}_{\hat{B}}^{q}$, é sempre um espaço de Hilbert[2] quando, dadas as funções quaisquer $f, g \in \mathcal{S}_{\hat{B}}^{q,2}$, se define o produto interno

$$f \cdot g = \sum_{i=0}^{q} \int_{\hat{B}} \mathrm{D}_{\mathrm{G}}^{i} f \overline{\mathrm{D}_{\mathrm{G}}^{i} g}\,, \tag{20}$$

onde $\overline{\mathrm{D}_{\mathrm{G}}^{i} g}$ é o conjugado de $\mathrm{D}_{\mathrm{G}}^{i} g$. Pode-se constatar esse fato da seguinte forma: considerando funções reais, onde $\overline{\mathrm{D}_{\mathrm{G}}^{i} g} = \mathrm{D}_{\mathrm{G}}^{i} g$, a norma do espaço de Sobolev e a igualdade $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$, onde z é complexo, tem-se o desenvolvimento:

$$\begin{aligned} ||g||_{q,2} &= \sqrt{\sum_{i=0}^{q} \int_{\hat{B}} |\mathrm{D}_{\mathrm{G}}^{i} g|^{2}} \\ &= \sqrt{\sum_{i=0}^{q} \int_{\hat{B}} \mathrm{D}_{\mathrm{G}}^{i} g \overline{\mathrm{D}_{\mathrm{G}}^{i} g}} \\ &= \sqrt{g \cdot g}\,, \end{aligned} \tag{21}$$

onde se observa que a norma é induzida pelo produto interno.

Para os problemas tratados neste trabalho, no âmbito de sua formulação fraca, apresentada a seguir, é suficiente admitir soluções que sejam funções quadrado integráveis, membros do espaço de Sobolev $\mathcal{H}_{\hat{B}}^{1}$.

1.2.2 Relações Integrais

A abordagem utilizada para o desenvolvimento da formulação fraca do problema 1 baseia-se em convertê-lo para uma relação integral equivalente. Ao se proceder dessa forma, considerando também que as possíveis soluções pertençam à $\mathcal{H}_{\hat{B}}^{1}$, a restrição de suavidade imposta à incógnita pode ser eliminada, já que a equação integro-diferencial obtida é regida por uma soma infinita (integral) ao longo do domínio, enquanto que a equação diferencial deve ser válida em cada um de seus pontos. Neste caso, além das soluções fortes, é possível obter as chamadas soluções fracas, que atendem à relação integral mas não à diferencial.

[2] Espaço de Banach cuja norma é induzida por um produto interno.

Suporte de Função. Dado o mapeamento $u : V \mapsto \mathbb{R}$, chama-se suporte de u o conjunto

$$supp\,(u) := \overline{\{x \in V \,|\, u\,(x) \neq 0\}}\,, \tag{22}$$

ou seja, trata-se do fechamento do subconjunto de V onde os valores de u não são nulos.

Conjunto Compacto. Um conjunto A é dito compacto se para uma coleção qualquer de subconjuntos abertos $U_\alpha \subseteq A$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, onde $A = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{Z}} U_\alpha$, existir uma coleção finita $U_1, \cdots, U_n$ tal que

$$A = \bigcup_{\alpha=1}^{n} U_\alpha\,. \tag{23}$$

Desta definição resulta que em qualquer coleção infinita de membros distintos de um conjunto compacto sempre haverá pelo menos um "ponto de acumulação", para o qual os demais se aproximam. O domínio $[0, 1]$, por exemplo, é um conjunto compacto, enquanto $[0, 1[$ não.

Solução Fraca. Seja a incógnita g membro do subespaço $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}^1_{\hat{B}}$ das funções quadrado-integráveis que atuam em $\hat{B}$. Sejam o subespaço $\mathcal{W} \subset \mathcal{G}$ das funções cujos valores são nulos em $\partial\hat{B}$ e o subconjunto $\mathcal{W}_S \subset \mathcal{W}$ daquelas com suporte compacto em $\hat{B}$. Seja um operador diferencial $\boldsymbol{D}^{(q)}$, simétrico em $\mathcal{G}$. Dada uma função qualquer $w \in \mathcal{W}_S$, tem-se a igualdade

$$w\boldsymbol{D}^{(q)}\,(g) = g\boldsymbol{D}^{(q)}\,(w)\;,\; \forall g \in \mathcal{G}. \tag{24}$$

Subtraindo os dois lados da igualdade pela função wf, obtém-se

$$w\left(\boldsymbol{D}^{(q)}\,(g) - f\right) = g\boldsymbol{D}^{(q)}\,(w) - wf. \tag{25}$$

Integrando essa expressão ao longo do domínio $\hat{B}$, tem-se

$$\int_{\mathring{B}} w\left(\boldsymbol{D}^{(q)}\,(g) - f\right) = \int_{\mathring{B}} g\boldsymbol{D}^{(q)}\,(w) - wf\,, \tag{26}$$

uma vez que w é nula no contorno. Se a função g for solução do lado direito da expressão, então

$$\int_{\mathring{B}} w\left(\boldsymbol{D}^{(q)}\,(g) - f\right) = 0\,,\; \forall w \in \mathcal{W}_S\,, \tag{27}$$

onde a função w é denominada *função peso*, *função teste* ou *variação*. O *Teorema de Lax-Milgram* assegura que expressões desse tipo possuem solução única, denominada solução fraca do problema 1. Caso a função g e a função peso w sejam suaves (membros de C^∞) no domínio, o *Lema de du Bois-Reymond*[3] demonstra que

$$\boldsymbol{D}^{(q)}\,(g) = f, \tag{28}$$

cujo formato é idêntico a (8). Com base no que foi apresentado, seja, a seguir, a formulação fraca do problema 1.

[3]Trata-se de uma generalização do Lema Fundamental do Cálculo Variacional.

Problema 2. *Seja $\mathbb{R}^m$ um espaço euclidiano m-dimensional. Sejam o espaço de Sobolev $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}^1_{\hat{B}}$ formado por funções que mapeiam o domínio de Lipschitz $\hat{B} \subset \mathbb{R}^m$ para o espaço $\mathbb{R}$ e a função $\boldsymbol{D}^{(q)}$ um operador diferencial de ordem q, simétrico em $\mathcal{G}$. Sejam o conjunto $\mathcal{W} \subset \mathcal{G}$ das funções cujos valores são nulos em $\partial\hat{B}$ e o subconjunto $\mathcal{W}_S \subset \mathcal{W}$ daquelas com suporte compacto em $\hat{B}$. Dada a função $f \in \mathcal{G}$, encontre $g \in \mathcal{G}$ tal que*

$$\int_{\mathring{B}} w \left(\boldsymbol{D}^{(q)}(g) - f \right) = 0 \, , \forall w \in \mathcal{W}_S \, , \tag{29}$$

respeitada a condição de contorno

$$\boldsymbol{C}(g) = c \ \text{em} \ \partial\hat{B} \, , \tag{30}$$

onde são prescritos o operador diferencial $\boldsymbol{C}$ e a função $c \in \mathcal{G}$.

1.3 Operador Elíptico

1.3.1 Notação Multi-Indicial

A fim de evitar sobrecarga notacional nas expressões subsequentes, dotadas de diversos índices, serão utilizados os chamados multi-índices. Assim, um multi-índice m-dimensional ϱ é uma tupla ordenada composta por números naturais, ou

$$\varrho := (\varrho_1, \cdots, \varrho_m) \ , \ \varrho \in \mathbb{N}^m \, , \tag{31}$$

onde cada membro $\varrho_i = 0, \cdots, l_i$. A partir daí, as seguintes definições podem ser utilizadas:

$$(\bullet)_\varrho = (\bullet)_{\varrho_1 \cdots \varrho_m} \, ; \tag{32}$$

$$|\varrho| = \sum_{i=1}^{m} \varrho_i ; \tag{33}$$

$$x^\varrho = \prod_{i=1}^{m} x_i^{\varrho_i} \ , \ x \in \mathbb{R}^m ; \tag{34}$$

$$\sum_{\varrho} = \sum_{\varrho_1}^{l_1} \cdots \sum_{\varrho_m}^{l_m} ; \tag{35}$$

$$\sum_{\text{cond}_\varrho} = \sum_{\varrho} \, , \ \text{respeitando a condição cond}_\varrho \, ; \tag{36}$$

$$\partial^\varrho = \partial^{|\varrho|} / \partial x_1^{\varrho_1} \cdots \partial x_m^{\varrho_m} \ , \ x_i \in \mathbb{R}. \tag{37}$$

1.3.2 Definição

Um operador diferencial linear de ordem $q > 0$ do tipo

$$\boldsymbol{L}^{(q)}(g) := \sum_{|\varrho| \leqslant q} h_\varrho \partial^\varrho g \, , \tag{38}$$

onde $h_\varrho \in \mathcal{H}^1_{\hat{B}}$, é dito elíptico se, dados q ímpar e $\chi \in \mathbb{R}^m$ não nulo,

$$\sum_{|\varrho|=q} h_\varrho\,(x)\,\chi^\varrho \neq 0\,\forall x \in \hat{B}\,. \tag{39}$$

Caso $q = 2k$ for par, então $\boldsymbol{L}^{(q)}$ é elíptico se existir uma contante qualquer $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$(-1)^k \sum_{|\varrho|=q} h_\varrho\,(x)\,\chi^\varrho > C|\chi|^q,\ \forall x \in \hat{B}\,. \tag{40}$$

Admitindo-se um operador diferencial elíptico para a formulação fraca descrita no problema 2, pode-se escrever a partir de (29) que

$$\int_{\mathring{B}} w\left(\boldsymbol{L}^{(q)}\,(g) - f\right) = 0$$

$$\int_{\mathring{B}} w\boldsymbol{L}^{(q)}\,(g) = \int_{\mathring{B}} wf\,. \tag{41}$$

1.3.3 Integração por Partes Recursiva

A integração por partes do produto de duas funções quaisquer u e v do espaço $\mathcal{G}$, numa dada dimensão k de $\mathbb{R}^m$, resulta a seguinte igualdade:

$$\int_{\mathring{B}} uv = \int_{\partial\hat{B}} uv_{(1)}n_k - \int_{\mathring{B}} u^{(1)}v_{(1)}\,, \tag{42}$$

onde n_k é a componente k da função normal unitária $\boldsymbol{n}$ ao contorno $\partial\hat{B}$ e as notações $\bullet^{(1)}$ e $\bullet_{(1)}$ representam a derivada e a antiderivada de ordem 1 em $x_k \in \mathbb{R}$, respectivamente. Em alguns casos, esse procedimento é bastante conveniente para simplificar ou mesmo viabilizar o processo de integração de certas expressões. Pode ocorrer que esse objetivo seja atingido somente após repetidas aplicações da integração por partes, nas quais os termos integrais em $\mathring{B}$ são integrados por partes recursivamente. Assim, após $r > 0$ aplicações, obtém-se que

$$\int_{\mathring{B}} uv = \int_{\partial\hat{B}} \left\{\sum_{i=1}^{r}(-1)^{i-1}u^{(i-1)}v_{(i)}\right\} n_k + \int_{\mathring{B}}(-1)^r u^{(r)}v_{(r)}\,. \tag{43}$$

No caso da equação (41), mediante a integração por partes recursiva aplicada no termo à esquerda, pode-se "transferir" todas as diferenciações parciais da incógnita g para a função peso w, conforme a igualdade

$$\int_{\mathring{B}} w\boldsymbol{L}^{(q)}\,(g) = \int_{\partial\hat{B}} C\,(g,w) + \int_{\mathring{B}} g\boldsymbol{L}^{*(q)}\,(w)\ , \tag{44}$$

onde $\boldsymbol{L}^{*(q)}$ é o operador *adjunto formal* de $\boldsymbol{L}^{(q)}$, descrito por

$$\boldsymbol{L}^{*(q)}\,(x) = \sum_{|\varrho|\leqslant q}(-1)^{|\varrho|}\partial^\varrho(h_\varrho x)\,, x \in \mathcal{G} \tag{45}$$

e o funcional bilinear[4] em $C : \mathcal{G} \times \mathcal{W}_S \mapsto \mathbb{R}$ é descrito por

$$C\left(g, w\right) = \sum_{|\varrho| \leqslant q} \sum_{i=1}^{|\varrho|} (-1)^{i-1} \left(h_\varrho w\right)^{(i-1)} \left(\partial^\varrho g\right)_{(i)} n_{k_i} \,, \tag{46}$$

tal que

$$k_i := \begin{cases} 1 \text{ se } 1 \leqslant i \leqslant \varrho_1 \\ 2 \text{ se } \varrho_1 < i \leqslant \varrho_1 + \varrho_2 \\ \vdots \\ m \text{ se } \varrho_1 + \cdots + \varrho_{m-1} < i \leqslant \varrho_1 + \cdots + \varrho_m \end{cases} . \tag{47}$$

Convém ressaltar que as eventuais restrições de Neumman em $\boldsymbol{C}$, na condição de contorno, precisam ser compatíveis com os integrandos presentes no funcional C. A partir da igualdade (44), pode-se reescrever a equação (41) da seguinte forma:

$$\int_{\mathring{B}} g \boldsymbol{L}^{*(q)}\left(w\right) = \int_{\mathring{B}} w f - \int_{\partial \hat{B}} C\left(g, w\right) \,, \tag{48}$$

que se mostra mais simples no que diz respeito à busca por soluções, uma vez que não há operador diferencial na incógnita g, mas apenas em w, que é uma função qualquer de $\mathcal{W}_S$.

Em resumo, pode-se concluir que a integração por partes da formulação fraca promove dois benefícios:

i. simplifica o processo de solução da equação, retirando as diferenciações da incógnita;

ii. destaca um termo específico que contempla as restrições de Neumman.

1.3.4 Decomposição aditiva

Conforme apresentado na seção anterior, o funcional C está relacionado apenas às restrições de Neumman da condição de contorno. A fim de se considerar as eventuais restrições de Dirichlet em $\boldsymbol{C}$, pode-se admitir que a solução g do problema 2 seja decomposta da seguinte forma:

$$g = g_0 + g_c \,, \tag{49}$$

onde $g_0 \in \mathcal{W}$ é nula no contorno e $g_c \in \mathcal{G}$ uma parcela conhecida que obedece à condição de contorno de Dirichlet. Considerando essa decomposição aditiva em (48), obtém-se que

$$\int_{\mathring{B}} g_0 \boldsymbol{L}^{*(q)}\left(w\right) = \int_{\mathring{B}} w f - \int_{\mathring{B}} g_c \boldsymbol{L}^{*(q)}\left(w\right) - \int_{\partial \hat{B}} C\left(g, w\right) . \tag{50}$$

1.3.5 O Problema Elíptico

A partir do que foi apresentado nesta seção, o problema 2, considerando-se operadores diferenciais elípticos, pode ser escrito como se segue.

[4]Como os demais termos da igualdade (44) são bilineares, então C_k também é bilinear.

Problema 3. *Seja $\mathbb{R}^m$ um espaço euclidiano m-dimensional. Sejam o espaço de Sobolev $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}^1_{\hat{B}}$ formado por funções que mapeiam o domínio de Lipschitz $\hat{B} \subset \mathbb{R}^m$ para o espaço $\mathbb{R}$ e $\boldsymbol{L}^{(q)}$ um operador elíptico de ordem q em $\mathcal{G}$. Sejam o conjunto $\mathcal{W} \subset \mathcal{G}$ das funções cujos valores são nulos em $\partial\hat{B}$ e o subconjunto $\mathcal{W}_S \subset \mathcal{W}$ daquelas com suporte compacto em $\hat{B}$. Dadas as funções $f, g_c \in \mathcal{G}$, encontre $g_0 \in \mathcal{W}$ tal que*

$$\int_{\overset{\circ}{B}} g_0 \boldsymbol{L}^{*(q)}(w) = \int_{\overset{\circ}{B}} w f - \int_{\overset{\circ}{B}} g_c \boldsymbol{L}^{*(q)}(w) - \int_{\partial\hat{B}} C(g, w)\ , \forall w \in \mathcal{W}_S\,, \tag{51}$$

repeitada a condição de contorno

$$\boldsymbol{C}(g) = c \text{ em } \partial\hat{B}\,, \tag{52}$$

onde são prescritos a função $c \in \mathcal{G}$ e o operador diferencial $\boldsymbol{C}$, compatível com g_c e com o funcional bilinear em $C : \mathcal{G} \times \mathcal{W}_S \mapsto \mathbb{R}$.

Problema vetorial. Os problemas de valor de contorno tratados até aqui consideram a incógnita como uma função escalar. No entanto, há diversos problemas da Física-Matemática cuja solução é vetorial. Dentre eles, serão considerados neste trabalho os problemas cuja descrição em cada dimensão puder ser feita segundo os termos do problema 3. Em outras palavras, tal problema pode ser colocado como se segue.

Problema 4. *Seja $\mathbb{R}^m$ um espaço euclidiano m-dimensional. Sejam o espaço de Sobolev $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}^1_{\hat{B}}$ formado por funções que mapeiam o domínio de Lipschitz $\hat{B} \subset \mathbb{R}^m$ para o espaço $\mathbb{R}$ e $\boldsymbol{L}^{(q)}$ um operador elíptico de ordem q em $\mathcal{G}$. Seja $\mathcal{G}^{\times p}$ o conjunto das funções que mapeiam $\hat{B}$ para o espaço euclidiano $\mathbb{R}^p$, cujas componentes ortonormais são membros de $\mathcal{G}$. Sejam o conjunto $\mathcal{W}^{\times p} \subset \mathcal{G}^{\times p}$ das funções cujos valores são nulos em $\partial\hat{B}$ e o subconjunto $\mathcal{W}_S^{\times p} \subset \mathcal{W}^{\times p}$ daquelas com suporte compacto em $\hat{B}$. Dadas as funções $f, g_c \in \mathcal{G}^{\times p}$, encontre $g_0 \in \mathcal{W}^{\times p}$ tal que, para qualquer $w \in \mathcal{W}_S^{\times p}$,*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p} \int_{\overset{\circ}{B}} g_{0\,k}\, \boldsymbol{L}^{*(q)}(w_k)\, \hat{\mathrm{e}}_k = \sum_{k=1}^{p} \int_{\overset{\circ}{B}} g_{0\,k} \int_{\overset{\circ}{B}} w_k f_k - \int_{\overset{\circ}{B}} g_{c\,k} \boldsymbol{L}^{*(q)}(w_k) \\ - \int_{\partial\hat{B}} C_k(g_k, w_k)\, \hat{\mathrm{e}}_k\,,\end{aligned} \tag{53}$$

respeitadas as condições de contorno

$$\sum_{k=1}^{p} \boldsymbol{C}_k(g_{c\,k})\, \hat{\mathrm{e}}_k = \sum_{k=1}^{p} c_k \hat{\mathrm{e}}_k \text{ em } \partial\hat{B}\,, \tag{54}$$

onde são prescritos as funções $c_k \in \mathcal{G}$ e os operadores diferenciais $\boldsymbol{C}_k$, compatíveis com $g_{c\,k}$ e com os funcionais bilineares em $C_k : \mathcal{G} \times \mathcal{W}_S \mapsto \mathbb{R}$.

1.4 Soluções Aproximadas

A intenção agora é discretizar o problema 3 a fim de viabilizar soluções numéricas. Para tal, seja o subespaço $\overline{\mathcal{G}} \subset \mathcal{G}$ dimensionalmente finito. Neste contexto, as funções $\overline{g}_c \in \overline{\mathcal{G}}$, $\overline{g}_0 \in \overline{\mathcal{W}}$ e $\overline{w} \in \overline{\mathcal{W}}_S$ são aproximações de g_c, g_0 e w respectivamente. Desta maneira, a equação (51) pode ser reescrita como

$$\int_{\overset{\circ}{B}} \overline{g}_0 \boldsymbol{L}^{*(q)}\left(\overline{w}\right) = \int_{\overset{\circ}{B}} \overline{w} f - \int_{\overset{\circ}{B}} \overline{g}_c \boldsymbol{L}^{*(q)}\left(\overline{w}\right) - \int_{\partial \hat{B}} C\left(g, \overline{w}\right) \text{ , } \forall \overline{w} \in \overline{\mathcal{W}}_S \,. \tag{55}$$

1.4.1 O Método de Galerkin

Nos termos do problema 3 discretizado, o método de Galerkin propõe que a incógnita $\overline{g}_0$ e a função peso $\overline{w}$ sejam descritas pela mesma base. Assim, se o conjunto $\mathcal{U} = \{g_1, \cdots, g_n\}$ é uma base de $\overline{\mathcal{G}}$, então pode-se escrever que

$$\overline{w} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i g_i \,. \tag{56}$$

e a função

$$\overline{g}_0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j g_j \tag{57}$$

Incluindo essas igualdades na expressão (55), pode-se realizar o seguinte desenvolvimento:

$$\int_{\overset{\circ}{B}} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j g_j \boldsymbol{L}^{*(q)} \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i g_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \left\{ \int_{\overset{\circ}{B}} \left[g_i f - \overline{g}_c \boldsymbol{L}^{*(q)}\left(g_i\right) \right] - \int_{\partial \hat{B}} C\left(g, g_i\right) \right\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \int_{\overset{\circ}{B}} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j g_j \boldsymbol{L}^{*(q)}\left(g_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \left\{ \int_{\overset{\circ}{B}} \left[g_i f - \overline{g}_c \boldsymbol{L}^{*(q)}\left(g_i\right) \right] - \int_{\partial \hat{B}} C\left(g, g_i\right) \right\}$$

Como a expressão anterior deve ser vália para qualquer ω_i, tem-se que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\int_{\overset{\circ}{B}} g_j \boldsymbol{L}^{*(q)}\left(g_i\right)}_{\tilde{K}_{ij}} \underbrace{\alpha_j}_{\tilde{d}_j} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\int_{\overset{\circ}{B}} \left[g_i f - \overline{g}_c \boldsymbol{L}^{*(q)}\left(g_i\right) \right] - \int_{\partial \hat{B}} C\left(g, g_i\right)}_{\tilde{F}_i} , \tag{58}$$

onde $\tilde{K}$ é uma matriz quadrada, $\tilde{d}$ e $\tilde{F}$ são matrizes coluna. Assim, pode-se definir a seguinte igualdade:

$$\tilde{K} \tilde{d} = \tilde{F} \,. \tag{59}$$

Problemas vetoriais. Diante do apresentado no problema 4, a igualdade (59), obtida a partir da discretização de Galerkin de uma única função escalar, precisa ser rearranjada para contemplar a discretização de cada uma das p componentes ortonormais da solução. Para tal, pode-se considerar que existem as igualdades

$$\tilde{K}_k \tilde{d}_k = \tilde{F}_k , \; k = 1, \cdots, p \,, \tag{60}$$

onde

$$(\tilde{K}_k)_{ij} = \int_{\overset{\circ}{B}} g_{j\,k} \boldsymbol{L}^{*(q)}\left(g_{i\,k}\right) \,, \tag{61}$$

$$(\tilde{F}_k)_j = \int_{\overset{\circ}{B}} \left[g_{j\,k} f - \overline{g}_{c\,k} \boldsymbol{L}^{*(q)}\left(g_{j\,k}\right) \right] - \int_{\partial \hat{B}} C_k\left(g_k, g_{j\,k}\right) \,, \tag{62}$$

$$(\tilde{d}_k)_j = \alpha_{j\,k} \,. \tag{63}$$

Seja então a matriz diagonal de dimensão p

$$[K]_{ij} := \begin{bmatrix} (\tilde{K}_1)_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\tilde{K}_2)_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & (\tilde{K}_m)_{ij} \end{bmatrix} . \tag{64}$$

Seja também uma matriz quadrada K de dimensão $r = p.n$, tais que as diversas matrizes $[K]_{ij}$ são suas submatrizes segundo a definição

$$K = \begin{bmatrix} [K]_{11} & [K]_{12} & \cdots & [K]_{1n} \\ [K]_{21} & [K]_{22} & \cdots & [K]_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [K]_{n1} & [K]_{n2} & \cdots & [K]_{nn} \end{bmatrix} . \tag{65}$$

Assim, considerando as matrizes coluna de dimensão $r \times 1$

$$F := \begin{bmatrix} (\tilde{F}_1)_1 & (\tilde{F}_2)_1 & \cdots & (\tilde{F}_p)_1 & (\tilde{F}_1)_2 & \cdots & (\tilde{F}_p)_n \end{bmatrix}^T \tag{66}$$

e

$$d := \begin{bmatrix} (\tilde{d}_1)_1 & (\tilde{d}_2)_1 & \cdots & (\tilde{d}_p)_1 & (\tilde{d}_1)_2 & \cdots & (\tilde{d}_p)_n \end{bmatrix}^T , \tag{67}$$

tem-se

$$Kd = F \, . \tag{68}$$

Para que essa igualdade seja um sistema linear, onde somente d é incógnita, faz-se necessário especificar os membros da base $\mathcal{U}$, tornando K uma matriz conhecida.